PACS numbers: 03.65.Ta
DOI: 10.3367/UFNr.0179.200902h.0204

Приложение
Модельная нерелятивистская квантовая механика. Размышления *

В.А. Котельников

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая механика рассматривает движение очень малых тел, таких как элементарные частицы. Как показали эксперименты, их движение не всегда подчиняется законам классической механики. Квантовая механика оказалась более сложной и абстрактной, нежели классическая. Частицы в "классической" квантовой механике не имеют зрительного образа. Они не имеют траекторий, не могут одновременно иметь определённого положения и скорости и т.п. Движение частиц определяется многими правилами, которые не всегда строго выводятся из основных законов, как это имеет место в классической механике макротел и электродинамике.

Всё это затрудняет изучение и использование квантовой механики, особенно для тех, кому больше присуще образное мышление.

В данной работе предлагается некоторая образная модель квантовой механики, которая соответствует накопленному экспериментальному материалу, но делает её (механику малых тел) более наглядной и более строго логично построенной.

Глава 1

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

1.1. Основные положения нерелятивистской квантовой механики

Основное положение классической механики заключается в следующем: состояние частицы массой m как точечного тела задается её положением с помощью радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и её скоростью $\mathbf{V}$. Зная эти параметры для некоторого момента времени t и силу внешнего поля, которая будет действовать на частицу, мы можем определить, используя закон Ньютона, все параметры её движения для любого момента времени.

В квантовой механике это оказывается не так. Как показали эксперименты и анализ их результатов, состояние частиц в данный момент времени t нельзя полностью охарактеризовать значениями $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$.

Основное положение нерелятивистской квантовой механики, подтверждённое опытами, заключается в следующем: если не учитывать спин частицы, то её состояние в некоторый момент времени t полностью определяется некоторой комплексной функцией (волновой функцией) в трёхмерном пространстве:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) \exp\left(\mathrm{i}\beta(\mathbf{r}, t)\right), \tag{1.1}$$

где $a(\mathbf{r}, t)$ и $\beta(\mathbf{r}, t)$ вещественны. Функция $a(\mathbf{r}, t)$ определяет вероятность положения частицы в момент t в том или другом месте пространства. Так, вероятность того, что частица будет находиться в момент t в некотором малом объёме $\mathrm{d}q$, содержащем конец радиуса-вектора $\mathbf{r}$, равна

$$\mathrm{d}P = a^2(\mathbf{r}, t)\, \mathrm{d}q. \tag{1.2}$$

Функция $\beta(\mathbf{r}, t)$ определяет динамическое состояние частицы.

В отсутствие магнитного поля, зная $\psi(\mathbf{r}, t)$ для начального момента, массу частицы m и силы внешних полей $\mathbf{F}_{\mathrm{o}}(\mathbf{r}, t)$, которые на неё будут действовать, можно найти $\psi(\mathbf{r}, t)$ для других моментов времени с помощью уравнения Шрёдингера. Оно, для нерелятивистского случая, который мы только и будем рассматривать, и отсутствия магнитного поля и спина записывается так:

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2\psi(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}, t)\,\psi(\mathbf{r}, t), \tag{1.3}$$

где $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-27}$ эрг с — постоянная Планка, $U(\mathbf{r}, t)$ — силовая функция поля, действующего на частицу. При этом сила, действующая на частицу, будет равна

$$\mathbf{F}_{\mathrm{o}} = -\nabla U(\mathbf{r}, t). \tag{1.4}$$

Зная $\psi(\mathbf{r}, t)$ и m, можно с помощью правил квантовой механики найти и другие параметры движения частицы.

Использование вероятностных параметров обусловлено тем, что при проведении совершенно идентичных экспериментов, в которых происходит регистрация малых частиц, мы не имеем одинаковых результатов. Координаты частиц регистрируются с разбросом, и можно лишь говорить о вероятности нахождения частицы в том или другом месте.

Приведённая закономерность является основным положением нерелятивистской квантовой механики.

1.2. Скорость частицы в нерелятивистской модельной квантовой механике

В общепринятой квантовой механике говорится, что частица не может одновременно находиться в определённом месте и иметь при этом определённую скорость. Но там рассматриваются параметры частицы, взятые из разных реализаций процесса при одной и той же волновой функции.

Попробуем построить модель, которая соответствовала бы приведённому основному положению квантовой механики и, значит, опыту, но в которой частица имела бы траекторию, как в макроскопической механике. При построении модели мы будем рассматривать положение и скорость в одной и той же реализации, где скорость и положение могут существовать одновременно. Для этого сначала найдем скорость и ускорение частицы, если она движется так, как этого требует основное положение квантовой механики, т.е. так, что удовлетворяется уравнение Шрёдингера (1.3).

Предположим, что частица, находясь в момент времени t в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, имеет скорость $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$. Найдём вероятность того, что частица за время $t, t + \mathrm{d}t$ пересечёт малую площадку $\mathrm{d}\mathbf{S}$ (см. рис. 1)[1].

* Приводятся введение и главы 1, 2. Полностью работа опубликована в 2008 г. (М.: Физматлит, 2008) 72 с.

[1] К сожалению, рисунки в рукописи и в опубликованной работе (М.: Физматлит, 2008) отсутствуют. (*Примеч. ред.*)

Частица за время $\mathrm{d}t$ передвинется на отрезок $\mathbf{V}\,\mathrm{d}t$. Она пересечёт площадку $\mathrm{d}\mathbf{S}$, если в момент t находилась на расстоянии $-\lambda\mathbf{V}\,\mathrm{d}t$ $(0<\lambda<1)$ от одной из точек этой площадки или, что то же, если она была в момент t в примыкающей к площадке $\mathrm{d}\mathbf{S}$ области объёмом $\mathrm{d}q=\mathbf{V}\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,\mathrm{d}t$. Вероятность этого, согласно (1.2), будет $\mathrm{d}P_{\mathrm{d}S}=a^2\mathbf{V}\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,\mathrm{d}t$.

Таким образом, $\mathrm{d}P_{\mathrm{d}S}$ — вероятность пересечения частицей площадки $\mathrm{d}\mathbf{S}$ за отрезок времени $t, t+\mathrm{d}t$. При $\mathbf{V}\,\mathrm{d}\mathbf{S}<0$ частица будет пересекать площадку $\mathrm{d}\mathbf{S}$ в обратном направлении и в этом случае $\mathrm{d}P_{\mathrm{d}S}$ будет отрицательно.

Возьмём некоторый объём q, ограниченный замкнутой поверхностью S. Вероятность того, что частица выйдет из этого объёма, т.е. пересечёт поверхность S, за время $t, t+\mathrm{d}t$ будет в соответствии с теоремой Гаусса – Остроградского

$$P_-=\mathrm{d}t\oint_S a^2\mathbf{V}\,\mathrm{d}\mathbf{S}=\mathrm{d}t\int_q\nabla(a^2\mathbf{V})\,\mathrm{d}q\,.$$

Вероятность того, что частица в момент t была в объёме q, согласно (1.2) равна

$$P_t=\int_q a^2\,\mathrm{d}q\,.$$

Вероятность того, что частица в момент $t+\mathrm{d}t$ останется в объёме q, равна

$$P_{t+\mathrm{d}t}=\int_q\left(a+\frac{\partial a}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}q=\int_q\left(a^2+2a\,\frac{\partial a}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}q\,.$$

Тут слагаемое с $\mathrm{d}t^2$ опущено как бесконечно малая величина более высокого порядка.

Очевидно, что за событием "частица находится в объеме q в момент t", обязательно последует одно из двух событий: "частица останется в объёме q в момент $t+\mathrm{d}t$" или "частица выйдет из области q за время $t, t+\mathrm{d}t$". Поэтому

$$P_t=P_{t+\mathrm{d}t}+P_-\,,$$

или

$$P_{t+\mathrm{d}t}-P_t=-P_-\,.$$

Из этого равенства находим

$$\int_q\frac{\partial a^2}{\partial t}\,\mathrm{d}q=-\int_q\nabla(a^2\mathbf{V})\,\mathrm{d}q\,,$$

и так как это равенство должно быть справедливо для любого q, то

$$\frac{\partial a^2}{\partial t}=-\nabla(a^2\mathbf{V})\,. \qquad (1.5)$$

Теперь посмотрим, чему должна равняться величина $\partial a^2/\partial t$, исходя из уравнения Шрёдингера (1.3). Для этого подставим в него значение $\psi(\mathbf{r},t)$ из (1.1). Получим

$$\mathrm{i}\hbar\left(\frac{\partial a}{\partial t}+\mathrm{i}a\,\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)\exp(\mathrm{i}\beta)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2a+2\mathrm{i}\nabla a\,\nabla\beta+\right.$$
$$\left.+\,\mathrm{i}a\nabla^2\beta-\alpha(\nabla\beta)^2\right]\exp(\mathrm{i}\beta)+Ua\exp(\mathrm{i}\beta)\,. \qquad (1.6а)$$

Сокращая обе части уравнения на $\hbar\exp(\mathrm{i}\beta)$ и приравнивая мнимые части, получим

$$\frac{\partial a}{\partial t}=-\frac{\hbar}{2m}\left[2\nabla a\,\nabla\beta+a\nabla^2\beta\right].$$

Далее, умножая обе части на $2a$ и преобразовывая, получим

$$2a\,\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{\partial a^2}{\partial t}=-\frac{\hbar}{2m}\left[4a\nabla a\,\nabla\beta+2a^2\nabla^2\beta\right], \qquad (1.6б)$$

или

$$\frac{\partial a^2}{\partial t}=-\frac{\hbar}{m}\,\nabla(a^2\nabla\beta)\,. \qquad (1.6)$$

Приравнивая действительные части в (1.6а) и сокращая на $a\exp(\mathrm{i}\beta)$, получим

$$-\hbar\,\frac{\partial\beta}{\partial t}=\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\frac{\nabla^2a}{a}+(\nabla\beta)^2\right]+U\,. \qquad (1.7)$$

Мы видим, что уравнения (1.5) и (1.6) будут совпадать, если принять

$$\mathbf{V}(\mathbf{r},t)=\frac{\hbar}{m}\,\nabla\beta(\mathbf{r},t)\,. \qquad (1.8)$$

Таким образом, *если частица в момент времени* t *оказалась в точке с радиусом-вектором* $\mathbf{r}$, *то её скорость, для того чтобы удовлетворялось уравнение Шрёдингера и соотношение* (1.2), *должна соответствовать уравнению* (1.8).

1.3. Силы в нерелятивистской модельной квантовой механике

Найдём теперь силы, которые должны действовать на частицу, чтобы она имела эти скорости. Для этого определим из полученных скоростей ускорение частицы. Ускорение и скорость при движении частицы по некоторой траектории, когда надо учитывать изменение $V(\mathbf{r},t)$ за счёт $\mathbf{r}$ и t, будут, как известно, связаны уравнением (см. приложение 1)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\,\nabla(\mathbf{V}^2)-\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}\,. \qquad (1.9)$$

Согласно уравнению (1.8), скорость $\mathbf{V}$ является градиентом, поэтому векторное произведение $\nabla\times\mathbf{V}=0$ и, значит,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\,\nabla(\mathbf{V}^2)+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}\,. \qquad (1.10)$$

Обратим внимание на разницу между $\mathrm{d}\mathbf{V}/\mathrm{d}t$ и $\partial\mathbf{V}/\partial t$. Производная $\mathrm{d}\mathbf{V}/\mathrm{d}t$ — это ускорение частицы при её движении по траектории, в то время как $\partial\mathbf{V}/\partial t$ — это частная производная $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ по времени, когда $\mathbf{r}$ считается постоянным.

Если принять, что движение частицы подчиняется закону Ньютона, то для возникновения ускорения на неё должна подействовать сила

$$\mathbf{F}=m\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}=\frac{m}{2}\,(\mathbf{V}^2)+m\,\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}\,, \qquad (1.11)$$

или, учитывая (1.8), получим

$$\mathbf{F}=\frac{m}{2}\,\nabla\left(\frac{\hbar^2}{m^2}(\nabla\beta)^2\right)+m\,\frac{\hbar}{m}\,\frac{\partial\nabla\beta}{\partial t}=\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla(\nabla\beta)^2+\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\nabla\beta\,. \qquad (1.12)$$

Выражение, стоящее в правой части (1.12), можно также получить из равенства (1.7). Действительно, если взять градиент от правой и левой частей равенства (1.7), получим

$$-\hbar\,\frac{\partial\nabla\beta}{\partial t}=\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\nabla\,\frac{\nabla^2 a}{a}+\nabla(\nabla\beta)^2\right]+\nabla U\,,$$

или

$$\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla(\nabla\beta)^2+\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\nabla\beta=\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla\,\frac{\nabla^2 a}{a}-\nabla U\,.$$

Принимая это во внимание, выражение (1.12) можно переписать так:

$$\mathbf{F}=\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla\,\frac{\nabla^2 a}{a}-\nabla U=\mathbf{F}_{\mathrm{q}}+\mathbf{F}_{\mathrm{o}}=m\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (1.13)$$

Здесь

$$\mathbf{F}_{\mathrm{o}}=-\nabla U\,, \qquad (1.14)$$

в соответствии с условием (1.4), — сила внешнего поля, действующая на частицу;

$$\mathbf{F}_{\mathrm{q}}=\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla\,\frac{\nabla^2 a}{a} \qquad (1.15)$$

— добавочная сила, которая должна действовать на частицу для того, чтобы она перемещалась так, как этого требует уравнение Шрёдингера, и, значит, было бы совпадение с экспериментами. Эта сила определяется модулем волновой функции $a(\mathbf{r},t)$.

1.4. Модель малой частицы в нерелятивистской модельной квантовой механике

На основании сказанного предлагается следующая модель малой частицы. Модель частицы состоит из совокупности некоторого объёмного образования в виде скалярного поля $a^2(\mathbf{r},t)$, равного квадрату модуля волновой функции (1.1), и движущейся в нём точечной частицы. Поле модели назовём квазиполем, точечную частицу — Т-частицей, а совокупность квазиполя и Т-частицы — квантоном.

Динамика квазиполя определяется уравнением Шрёдингера (1.3). Движение Т-частицы подчиняется закону Ньютона (1.13), т.е. она движется как точечная частица в классической механике под действием суммы двух сил: классической — F_{o} (1.14) и квантовой — F_{q} (1.15). Наличие силы F_{q} обусловливает отличие квантовой механики от классической.

В случае, когда силой F_{q} можно пренебречь по сравнению с внешними силами F_{o}, действуют законы классической механики. Вероятность того, что частица будет находиться в малом объёме $\mathrm{d}q$, содержащем конец радиуса-вектора $\mathbf{r}$, в момент t даётся выражением (1.2). Скорость Т-частицы в этом случае будет определяться выражением (1.8). При повторении в точности одного и того же эксперимента волновая функция, а значит, и квазиполе будут повторяться, но Т-частица будет занимать разные положения с вероятностью, даваемой выражением (1.2), и, соответственно, для разных положений Т-частицы её скорость будет определяться выражением (1.8). В уравнение Шрёдингера положение Т-частицы не входит, таким образом, она на своё квазиполе не действует. Т-частица может иметь электромагнитные и другие поля и действовать с помощью внешних сил на другие элементарные частицы.

Мы рассмотрели случай, когда элементарная частица имеет одну волновую функцию. Это так называемый чистый случай. Может быть и более сложная ситуация, когда элементарная частица может иметь одну из нескольких волновых функций $\psi_1(\mathbf{r},t),\psi_2(\mathbf{r},t),\ldots,$ $\psi_n(\mathbf{r},t)$ с вероятностями $P_1,P_2,\ldots,P_n$. Это будет так называемый смешанный случай, когда надо рассматривать ситуацию с каждой волновой функцией отдельно и затем складывать результаты с учётом вероятностей $P_1,P_2,\ldots,P_n$.

Нерелятивистскую квантовую механику можно построить, декларируя предложенную модель элементарной частицы, сославшись на то, что она не противоречит опытам, и выводя всё остальное, включая уравнение Шрёдингера, логическими построениями из неё.

Глава 2

КВАЗИПОЛЕ

2.1. Рассмотрим подробнее свойства квазиполя. В соответствии с (1.2) вероятность того, что Т-частица будет находиться в момент t в некоторой области q, будет

$$P_q(t)=\int_q a^2(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}q\,, \qquad (2.1)$$

где интеграл берётся по этой области. Будем называть $a^2(\mathbf{r},t)$ **плотностью** квазиполя в точке $\mathbf{r}$ в момент t, а величину интеграла (2.1) — **количеством** квазиполя в объёме q. Тогда будет справедливо положение: вероятность нахождения Т-частицы в некоторой области равна количеству квазиполя в ней.

Квазиполе, которое можно представить как некоторый газ или сжимаемую жидкость с плотностью $a^2(\mathbf{r},t)$, не возникает со временем и не исчезает, а только перемещается со скоростью $V(\mathbf{r},t)$. При этих условиях для квазиполя должно выполняться соотношение

$$\mathrm{d}t\,\frac{\partial}{\partial t}\int_q a^2\,\mathrm{d}q=-\mathrm{d}t\oint_S a^2\mathbf{V}\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,. \qquad (2.2)$$

Левый интеграл в (2.2) берётся по некоторой области q, правый — по замкнутой поверхности S, охватывающей эту область. За время $\mathrm{d}t$ количество квазиполя в области q уменьшится на величину левой части выражения (2.2). Это уменьшение произойдёт только за счёт того, что поле выйдет через поверхность S. Через элемент этой поверхности $\mathrm{d}\mathbf{S}$ за время $\mathrm{d}t$ выйдет количество квазиполя, равное $a^2\mathbf{V}\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,\mathrm{d}t$, а через всю поверхность выйдет количество квазиполя, равное правой части равенства (2.2).

2.2. Найдём далее, какова должна быть скорость движения квазиполя $V(\mathbf{r},t)$, чтобы выполнялось и соотношение (2.2), и условие того, что плотность квазиполя $a^2(\mathbf{r},t)$ соответствует волновой функции $\psi(\mathbf{r},t)=$ $=a(\mathbf{r},t)\exp\left(\mathrm{i}\beta(\mathbf{r},t)\right)$, которая является решением уравнения Шрёдингера. Для этого воспользуемся теоремой[2] из приложения 2, полагая в выражении (П2.3)

$$\psi_1 = \psi_2 = a\exp(\mathrm{i}\beta)\,.$$

Тогда, с учётом того, что $\nabla\psi_{1,2} = (\nabla a)\exp(\mathrm{i}\beta) + \mathrm{i}(\nabla\beta)a\exp(\mathrm{i}\beta)$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_q a\exp(\mathrm{i}\beta)a\exp(-\mathrm{i}\beta)\,\mathrm{d}q = \\ = \mathrm{i}\,\frac{\hbar}{2m}\oint_S\Big\{a\exp(-\mathrm{i}\beta)\big[(\nabla a)\exp(\mathrm{i}\beta)+\mathrm{i}(\nabla\beta)a\exp(\mathrm{i}\beta)\big]- \\ - a\exp(\mathrm{i}\beta)\big[(\nabla a)\exp(-\mathrm{i}\beta)-\mathrm{i}(\nabla\beta)a\exp(-\mathrm{i}\beta)\big]\Big\}\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Проведя упрощение, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_q a^2\,\mathrm{d}q = -\frac{\hbar}{m}\oint_S(\nabla\beta)\,a^2\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Сравнивая это выражение с (2.2), видим, что оно будет совпадать с ним, если принять скорость движения квазиполя равной

$$\mathbf{V}(r,t) = \frac{\hbar}{m}\,\nabla\beta(r,t)\,. \tag{2.3}$$

Таким образом, можно в модели принять, что *квазиполе не может исчезать и появляться, а только перемещаться со скоростью, даваемой выражением* (2.3).

Если взять в качестве области интегрирования всё пространство, охватываемое квазиполем, где $a \neq 0$, то интеграл правой части выражения (2.2) будет равен нулю, так как в этом случае на поверхности S $a = 0$.

Таким образом, полное количество квазиполя элементарной частицы всегда постоянно. Это количество будет равно вероятности того, что Т-частица находится где-то в квазиполе, а эта вероятность равна единице. Отсюда следует, что *полное "количество" квазиполя элементарной частицы всегда равно единице, т.е. интеграл* (2.1)*, если его взять по всему полю, должен быть равен единице*:

$$\int_Q a^2(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}q = 1\,. \tag{2.4}$$

Здесь и далее индекс Q у интеграла означает, что интегрирование производится по всему пространству, где $a^2 \neq 0$.

2.3. Сравнивая выражения (1.8) и (2.3), видим, что *скорость движения* Т-*частицы равна скорости движения квазиполя в той точке, где находится* Т-*частица, т.е. она увлекается квазиполем и движется вместе с ним*.

Поскольку скорости квазиполя и Т-частицы равны, то должны быть равны и их ускорения. Поэтому элемент поля, двигаясь по некоторой траектории, будет иметь ускорение, в соответствии с (1.13) равное

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar^2}{2m^2}\,\nabla\,\frac{\nabla^2 a}{a} - \frac{1}{m}\,\nabla U_0\,. \tag{2.5}$$

Второе слагаемое правой части этого уравнения определяется внешними силами, первое — силами самого поля. Оно зависит от плотности поля и его производных в точке нахождения Т-частицы — от параметра $\nabla^2 a/a$, который у нас далее будет часто встречаться. Поэтому рассмотрим его подробнее.

2.4. Поместим начало координат в интересующую нас точку. Представим a рядом Тейлора, ограничив область рассмотрения так, чтобы было достаточно квадратичных членов. Будем иметь

$$a(x,y,z) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\,x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\,y^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\,z^2 + \frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial y}\,xy + \\ + \frac{\partial^2 a}{\partial y\,\partial z}\,yz + \frac{\partial^2 a}{\partial z\,\partial x}\,zx + \frac{\partial a}{\partial x}\,x + \frac{\partial a}{\partial y}\,y + \frac{\partial a}{\partial z}\,z + a\,,$$

где производные и функция a берутся в точке $(0,0,0)$. Найдем среднее значение a на расстоянии δ от точки $(0,0,0)$, подразумевая под этим величину

$$\langle a_\delta\rangle = \frac{1}{6}\big[a(\delta,0,0) + a(-\delta,0,0) + a(0,\delta,0) + \\ + a(0,-\delta,0) + a(0,0,\delta) + a(0,0,-\delta)\big]\,.$$

Имеем

$$a(\delta,0,0) + a(-\delta,0,0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\,\delta^2 + \frac{\partial a}{\partial x}\,\delta + a + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\,\delta^2 - \frac{\partial a}{\partial x}\,\delta + a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\,\delta^2 + 2a\,.$$

Аналогично, и для $a(0,\delta,0) + a(0,-\delta,0)$ и $a(0,0,\delta) + a(0,0,-\delta)$.

Подставив эти выражения в $\langle a_\delta\rangle$, получим

$$\langle a_\delta\rangle = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right)\delta^2 + a = \frac{1}{6}\,\delta^2\nabla^2 a + a\,.$$

Откуда

$$\frac{\nabla^2 a}{a} = 6\,\frac{\langle a_\delta\rangle - a}{a\delta^2}\,. \tag{2.6}$$

Таким образом, величина (2.6) показывает, на сколько поле в центре меньше, чем в ближайшем окружении. Эту величину будем называть **разрежённостью** квазиполя.

Отметим, что разрежённость не зависит от интенсивности поля. Она также не зависит от поворота осей координат, так как $\nabla^2 a$, как известно, от него не зависит.

В (2.5) первое слагаемое в выражении для ускорения квазиполя и Т-частицы направлено по градиенту разрежённости квазиполя в направлении большей разрежённости и пропорционально этому градиенту. Поэтому квазиполе будет стремиться двигаться так, чтобы разрежённость уменьшить и сделать её равномерно распределённой по пространству.

Поскольку скорости движения элементов квазиполя определяются в соответствии с (1.8) градиентом от скаляра β, то $\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = 0$, т.е. квазиполе не должно иметь вихрей.

2.5. Как уже говорилось, состояние элементарной частицы полностью определяется её волновой функцией

---

[2] Эта теорема утверждает: "*Если $\psi_1(\mathbf{r},t)$ и $\psi_2(\mathbf{r},t)$ меняются со временем согласно одному и тому же уравнению Шрёдингера, т.е.*

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2\psi_1 + U\psi_1\,, \tag{П2.1}$$

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2\psi_2 + U\psi_2\,, \tag{П2.2}$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_q \psi_1^*\psi_2\,\mathrm{d}q = \mathrm{i}\,\frac{\hbar}{2m}\int_S\big(\psi_1^*\,\nabla\psi_2 - \psi_2\,\nabla\psi_1^*\big)\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,. \tag{П2.3}$$"

(*Примеч. ред.*)

(1.1). Она также полностью определяет и параметры квазиполя: его плотность a^2 и скорость движения $\mathbf{V} = (\hbar/m)\nabla\beta$. Но обратно, зная только плотность и скорость движения квазиполя, нельзя полностью определить волновую функцию. Действительно, при этом мы будем знать только модуль волновой функции и градиент её аргумента в соответствии с (1.8), т.е. производные аргумента по координатам. При этом можно к аргументу добавить ещё произвольную функцию времени, не зависящую от координат, при этом градиент не изменится.

Чтобы найти β, надо ещё знать производную $\partial\beta/\partial t$. Её можно найти из уравнения (1.7), зная U, поскольку волновая функция должна удовлетворять уравнению Шрёдингера. Тогда получим

$$\beta(\mathbf{r}, t) = \beta(\mathbf{r}_0, t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial\beta(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t}\, \mathrm{d}t + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \nabla\beta(\mathbf{r}, t)\, \mathrm{d}\mathbf{r}\,. \quad (2.7)$$

Таким образом, квазиполе совместно с U определяют волновую функцию с точностью до постоянной $\beta(\mathbf{r}_0, t_0)$, которая на состоянии квантона не сказывается.

Так же, как не всякая комплексная функция может быть волновой — она должна удовлетворять уравнению Шрёдингера, так и не всякие поле $a^2(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ могут представлять квазиполе — они должны соответствовать некоторой волновой функции.

2.6. Если в уравнение Шрёдингера (1.3) подставить волновую функцию $\psi(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t)\exp\big(\mathrm{i}\beta(\mathbf{r}, t)\big)$ и учесть соотношение для скорости квазиполя (2.3), то выражения для мнимой (1.6) и действительной (1.7) частей уравнения Шрёдингера приобретают простой физический смысл. Действительно, с учетом (2.3) соотношение (1.6) переходит в

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} = -\nabla(a^2\mathbf{V})\,, \quad (2.8)$$

а соотношение (1.7), если взять градиент от обеих его частей, переходит в

$$-m\,\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla\,\frac{\nabla^2 a}{a} + \frac{m}{2}\,\nabla V^2 + \nabla U\,. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) равносильно уравнению (2.2) и говорит о том, что квазиполе не может возникать и исчезать, а только перемещаться. Уравнение (2.9), с учётом (1.10) и (2.3), будет эквивалентно уравнению (2.5), т.е. тому положению, что ускорение элементов квазиполя равно сумме сил — внешней и силе самого квазиполя, делённой на массу частицы. Таким образом, уранение Шрёдингера для квазиполя соответствует уравнению газодинамики с той разницей, что сила, с которой квазиполе действует на самого себя и которую мы обозначили $\mathbf{F}_{\mathrm{q}}$, в корне отличается от аналогичной силы в газодинамике.